Tuyển tập Hội nghị khoa học toàn quốc lần thứ nhất về Động lực học và Điều khiển
Đà Nẵng, ngày 19-20/7/2019, tr. 318-323, DOI 10.15625/vap.2019000296

Dao động cộng hưởng của dầm phi tuyến hình học với ma sát cấp phân số

Nguyễn Văn Khang, Trương Quốc Chiến, Phạm Thành Chung
Bộ môn Cơ học ứng dụng, Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
E-mail: khang.nguyenvan2@hust.edu.vn,
chung.phamthanh@hust.edu.vn

Tóm tắt
Đạo hàm cấp phân số đang được sử dụng để mô tả quan hệ giữa ứng suất và biến dạng, giữa lực và dịch chuyển, giữa lực và vận tốc,… trong các hệ cơ học và cơ điện tử. Bài báo này nghiên cứu dao động của dầm tính đến yếu tố phi tuyến hình học và cản cấp phân số. Sử dụng phương pháp trung bình hóa tính toán dao động cộng hưởng của dầm và ảnh hưởng của số hạng cản cấp phân số đến đường cong biên độ - tần số.

Từ khóa: dầm phi tuyến hình học, đạo hàm cấp phân số, dao động cộng hưởng, phương pháp trung bình hóa.

1. Mở đầu

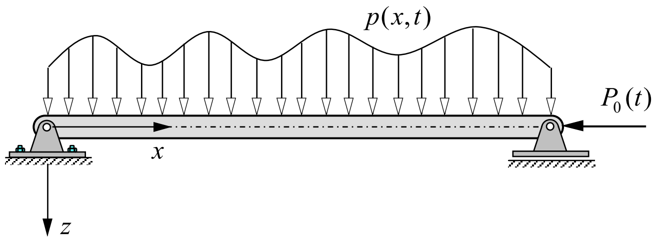
Đạo hàm và tích phân cấp phân số đã được đề cập đến từ cuối thế kỷ XVII. Tuy nhiên phải đến cuối thế kỷ XIX lý thuyết đạo hàm và tích phân cấp phân số mới được nghiên cứu bởi các nhà toán học Liouville, Grünwald, Letnikov, Riemann, v.v… Lúc đầu lý thuyết đạo hàm cấp phân số được phát triển chủ yếu như là một lĩnh vực lý thuyết thuần tuý của toán học và chỉ hữu ích cho các nhà toán học. Tuy nhiên, một vài chục năm gần đây, nhiều tác giả đã chỉ ra rằng đạo hàm và tích phân cấp không nguyên rất phù hợp cho sự mô tả tính chất của nhiều loại vật liệu mới, chẳng hạn như vật liệu polymer. Họ cũng chỉ ra rằng những mô hình cấp phân số thích hợp hơn những mô hình cấp nguyên đã được sử dụng trước đó. Sự xem xét về mặt vật lý càng cho thấy việc sử dụng các mô hình dựa trên đạo hàm cấp phân số là hợp lý và phù hợp [1-7].

Trong bài báo này, áp dụng phương trình dao động phi tuyến của dầm của dầm [8] thiết lập phương trình vi tích phân phi tuyến mô tả dao động của dầm khi chú ý đến tính chất phi tuyến hình học và cản cấp phân số. Sử dụng phương pháp Ritz-Galerkin biến đổi phương trình vi tích phân mô tả dao động uốn của dầm về hệ phương trình vi phân thường. Sau đó áp dụng phương pháp trung bình hóa tính toán dao động cộng hưởng của dầm.

2. Biến đổi phương trình dao động của dầm phi tuyến về hệ phương trình vi phân thường

Trong bài báo này xét dao động uốn của dầm khi tính chất đàn hồi của vật liệu tuân theo quy luật đàn hồi tuyến tính, xét ảnh hưởng của tính phi tuyến hình học và bỏ qua tác dụng của lực ở đầu trục, $P_0(t)=0$. Khi đó phương trình dao động uốn của dầm chú ý đến tính phi tuyến hình học có dạng [8, 9]

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial w}{\partial t}+k_f w=p(x,t) \quad (1)$$



Hình 1. Mô hình dầm

Xét trường hợp trên dầm còn có thêm thành phần cản cấp phân số $\beta_\alpha \dfrac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial w}{\partial t}+\beta_\alpha\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}+k_f w=p(x,t) \quad (2)$$

Trong (2), thành phần lực dọc N có dạng

$$N=\frac{EA}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx \quad (3)$$

Áp dụng phương pháp Ritz-Galerkin ta tìm nghiệm của phương trình vi - tích phân (2) dưới dạng

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)q_n(t) \quad (4)$$

Trong đó $\Phi_n(x)$ là hàm dạng của dầm. Theo [10] hàm dạng $\Phi_n(x)$ thỏa mãn phương trình sau

$$\frac{d^4\Phi_n(x)}{dx^4}=\frac{\rho A}{EI}\omega_n^2\Phi_n(x) \quad (5)$$

Trong đó

$$\omega_n^2=\frac{n^4\pi^4 EI}{\rho A L^4} \quad (6)$$

Từ (4) ta suy ra

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d\Phi_i(x)}{dx}q_i(t)$$

Do đó

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d\Phi_i(x)}{dx}\frac{d\Phi_j(x)}{dx}q_i(t)q_j(t) \quad (7)$$

Thế (7) vào biểu thức (3) ta được

$$N=\frac{EA}{2L}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_0^L\frac{d\Phi_i(x)}{dx}\frac{d\Phi_j(x)}{dx}dx\right]q_i(t)q_j(t) \qquad (8)$$

Nếu ký hiệu $\xi=\dfrac{x}{L}$, ta có

$$\int_0^L\frac{d\Phi_i(x)}{dx}\frac{d\Phi_j(x)}{dx}dx=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{d\Phi_i(\xi)}{d\xi}\frac{d\Phi_j(\xi)}{d\xi}d\xi$$

Ta đưa vào ký hiệu

$$k_{ij}=\int_0^L\frac{d\Phi_i(\xi)}{d\xi}\frac{d\Phi_j(\xi)}{d\xi}d\xi \qquad (9)$$

thì

$$\int_0^L\frac{d\Phi_i\left(x\right)}{dx}\frac{d\Phi_j\left(x\right)}{dx}dx=\frac{1}{L}k_{ij} \qquad (10)$$

Thế (10) vào (8) ta được

$$N=\frac{EA}{2L^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}K_{ij}q_i(t)q_j(t) \qquad (11)$$

Thế (4), (5) và (11) vào phương trình (2) ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\rho A\ddot{q}_n(t)+\beta\dot{q}_n(t)+k_f q_n(t)+\rho A\omega_n^2 q_n(t)+\beta_\alpha\frac{\partial^\alpha q_n(t)}{\partial t^\alpha}\Big]\Phi_n(x)-\frac{EA}{2L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}K_{ij}q_i(t)q_j(t)q_n(t)\frac{d^2\Phi_n(x)}{dx^2}==p(x,t) \qquad (12)$$

Chú ý rằng

$$\frac{d^2\Phi_n(x)}{dx^2}=\frac{1}{L^2}\frac{d^2\Phi_n(\xi)}{d\xi^2}$$

Do đó phương trình (12) có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\rho A\ddot{q}_n(t)+\beta\dot{q}_n(t)+k_f q_n(t)+\rho A\omega_n^2 q_n(t)+\beta_\alpha\frac{\partial^\alpha q_n(t)}{\partial t^\alpha}\Big]\Phi_n(\xi)-\frac{EA}{2L^4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}K_{ij}q_i(t)q_j(t)q_n(t)\frac{d^2\Phi_n(\xi)}{d\xi^2}==p(\xi,t) \qquad (13)$$

Nhân phương trình (13) với hàm dạng $\Phi_m(\xi)$ và lấy tích phân trên toàn bộ chiều dài của dầm từ 0 đến *L*, sử dụng tính chất trực giao của hàm dạng, ta được

$$\Big[\rho A\ddot{q}_m(t)+\beta\dot{q}_n(t)+k_f q_m(t)++\rho A\omega_m^2 q_m(t)+\beta_\alpha\frac{\partial^\alpha q_n(t)}{\partial t^\alpha}\Big]\int_0^1\Phi_m^2(\xi)d\xi-\frac{EA}{2L^4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}q_i(t)q_j(t)q_n(t)\int_0^1\Phi_m(\xi)\frac{d^2\Phi_n(\xi)}{d\xi^2}d\xi=\frac{1}{L}\int_0^1\Phi_m(\xi)p(\xi,t)d\xi \qquad (14)$$

Ta chọn hàm $\Phi_m(\xi)$ chuẩn hóa theo điều kiện

$$\int_0^1\Phi_m^2(\xi)d\xi=1 \qquad (15)$$

Nếu sử dụng ký hiệu

$$R_{mn}=\int_0^1\Phi_m(\xi)\frac{d^2\Phi_n(\xi)}{d\xi^2}d\xi \qquad (16)$$

thì phương trình (14) có dạng

$$\ddot{q}_m(t)+\frac{\beta}{\rho A}\dot{q}_m(t)+\omega_m^2 q_m(t)+\frac{k_f}{\rho A}q_m(t)+\frac{\beta_\alpha}{\rho A}\frac{\partial^\alpha q_m(t)}{\partial t^\alpha}-\frac{E}{2L^4\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}R_{mn}q_i(t)q_j(t)q_n(t)==\frac{1}{\rho AL}\int_0^1\Phi_m(\xi)p(\xi,t)d\xi \qquad (17)$$

Chú ý rằng

$$\int_0^1\Phi_m(\xi)\frac{d^2\Phi_n(\xi)}{d\xi^2}d\xi=\int_0^1\Phi_m\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\Phi_n}{d\xi}\right)d\xi==\underbrace{\Phi_m\frac{d\Phi_n}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}}_{=0}-\int_0^1\frac{d\Phi_n}{d\xi}\frac{d\Phi_m}{d\xi}d\xi=-k_{nm} \qquad (18)$$

Chú ý đến các điều kiện biên của dầm, ta có

- $\Phi_m(0)=0,\ \Phi_m(1)=0$ với dầm hai đầu bản lề hoặc hai đầu ngàm, hoặc
- $\dfrac{d\Phi_n(0)}{d\xi}=0,\ \dfrac{d\Phi_n(1)}{d\xi}=0$ với dầm đầu tự do.

Từ đó suy ra

$$\ddot{q}_m(t)+\frac{\beta}{\rho A}\dot{q}_m(t)+\left(\omega_m^2+\frac{k_f}{\rho A}\right)q_m(t)+\frac{\beta_\alpha}{\rho A}\frac{\partial^\alpha q_m(t)}{\partial t^\alpha}+\frac{E}{2\rho L^4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}K_{ij}K_{mn}q_iq_jq_n==\frac{1}{\rho AL}\int_0^1\Phi_m(\xi)p(\xi,t)d\xi=h_m(t) \qquad (19)$$

Trong đó

$$h_m(t)=\frac{1}{\rho AL}\int_0^1\Phi_m(\xi)p(\xi,t)d\xi \qquad (20)$$

Phương trình (19) có thể viết ở dạng tổng hữu hạn

$$\ddot{q}_m(t)+\frac{\beta}{\rho A}\dot{q}_m(t)+\left(\omega_m^2+\frac{k_f}{\rho A}\right)q_m(t)+\frac{\beta_\alpha}{\rho A}\frac{\partial^\alpha q_m(t)}{\partial t^\alpha}+\frac{E}{2\rho L^4}\sum_{n=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}k_{ij}k_{mn}q_iq_jq_n==h_m(t),\qquad (m=1,2,...,M) \qquad (21)$$

Trong một vài tài liệu người ta thường chuẩn hóa các hàm riêng bằng biểu thức

$$\Phi_m(\xi)=\sqrt{2}\sin(m\pi\xi), \qquad (22)$$

và đưa vào ký hiệu

$$k_{nm}=k_{mn}=\int_0^1\frac{d\Phi_n}{d\xi}\frac{d\Phi_m}{d\xi}d\xi=\begin{cases}\pi^2m^2 & \text{khi } m=n\\ 0 & \text{khi } m\neq n\end{cases} \qquad (23)$$

Khi đó phương trình (21) có dạng

$$\ddot{q}_m(t)+\frac{\beta}{\rho A}\dot{q}_m(t)+\omega_m^2\left(1+\frac{\alpha}{m^4}\right)q_m(t)+\frac{\beta_\alpha}{\rho A}\frac{\partial^\alpha q_m(t)}{\partial t^\alpha}+\frac{\omega_m^2}{2R^2m^2}\sum_{n=1}^{M}n^2q_n^2q_m=h_m(t) \qquad (24)$$

Trong đó

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 m^4, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho A L^4},$$

$$k = \frac{k_f}{\rho A \omega_0^2}, \quad R = \sqrt{\frac{I}{A}}, \tag{25}$$

với ω_0 là tần số cơ bản.

Khi ta lấy $M = 1$, từ (24) ta có

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{\beta}{\rho A}\dot{q}_1(t) + \omega_0^2(1+k)q_1(t) + \frac{\omega_0^2}{2R^2}q_1^3(t) + \frac{\beta_p}{\rho A}\frac{\partial^p q_1(t)}{\partial t^p} = h_1(t) \tag{26}$$

Phương trình vi phân (26) là phương trình Duffing có thêm số hạng cản dạng đạo hàm cấp phân số.

Để có thể áp dụng phương pháp trung bình hóa, giả thiết rằng phương trình (26) có thể viết dưới dạng sau

$$\ddot{q}_1(t) + \omega_0^2 q_1(t) = \varepsilon[-k\omega_0^2 q_1(t) - \frac{\omega_0^2}{2R^2}q_1^3(t) - \frac{\beta}{\rho A}\dot{q}_1(t) - \frac{\beta_p}{\rho A}\frac{\partial^p q_1(t)}{\partial t^p} + h_1(t)] \tag{27}$$

Hàm $h_1(t)$ ở vế phải được tính từ biểu thức (19) và (21)

$$h_1(t) = \frac{1}{\rho A L}\int_0^1 \Phi_1(\xi)p(\xi,t)d\xi = \frac{1}{\rho A L}\int_0^1 \sqrt{2}\sin(\pi\xi)p(\xi,t)d\xi, \tag{28}$$

còn ε là tham số bé. Xét trường hợp dầm chịu tác dụng của tải trọng ngoài phân bố đều với quy luật

$$p(x,t) = P_0\cos\Omega t \;\Rightarrow\; p(\xi,t) = P_0\cos\Omega t \tag{29}$$

Khi đó hàm $h_1(t)$ có dạng

$$h_1(t) = \frac{1}{\rho A L}\int_0^1 \sqrt{2}\sin(\pi\xi)P_0\cos\Omega t d\xi = \frac{2P_0\sqrt{2}}{\pi\rho A L}\cos\Omega t \tag{30}$$

3. Khảo sát dao động trong vùng cộng hưởng chính

3.1. Thiết lập phương trình đường cong biên độ tần số

Để nghiên cứu dao động cộng hưởng chính của hệ (26), $\Omega \approx \omega_0$, ta đặt

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\sigma \tag{31}$$

Trong đó, ε là tham số bé, σ thể hiện sự sai lệch giữa Ω với ω_0. Từ đó, phương trình (27) có dạng

$$\ddot{q}_1(t) + \Omega^2 q_1(t) = -\varepsilon\left[k\left(\Omega^2 - \varepsilon\sigma\right) - \sigma\right]q_1(t) - \varepsilon\frac{\left(\Omega^2 - \varepsilon\sigma\right)}{2R^2}q_1^3(t) - \frac{\varepsilon\beta}{\rho A}\dot{q}_1(t) - \frac{\varepsilon\beta_p}{\rho A}\frac{\partial^p q_1(t)}{\partial t^p} + \varepsilon\frac{2P_0\sqrt{2}}{\pi\rho A L}\cos\Omega t \tag{32}$$

Bỏ qua ảnh hưởng của các vô cùng bé bậc cao ε^2, phương trình (32) có dạng

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = \varepsilon f\left(q, D^p q, \dot{q}\right) \tag{33}$$

Trong đó $q_1(t)$ được thay bằng q(t) và hàm vế phải có dạng

$$f(q, D^p q, \dot{q}) = -\left(k\Omega^2 - \sigma\right)q(t) - \alpha q^3(t) - \delta\dot{q}(t) - \delta_p\frac{\partial^p q(t)}{\partial t^p} + E\cos\Omega t, \tag{34}$$

$$\alpha = \frac{\Omega^2}{2R^2}, \qquad \delta = \frac{\beta}{\rho A},$$

$$\delta_p = \frac{\beta_p}{\rho A}, \qquad E = \frac{2P_0\sqrt{2}}{\pi\rho A L}$$

Biến đổi phương trình vi phân (33) về dạng chuẩn Lagrange-Bogoliubov bằng phép biến đổi

$$q = a\cos\varphi \tag{35}$$

$$\dot{q} = -a\Omega\sin\varphi \tag{36}$$

$$\varphi = \Omega t + \theta \tag{37}$$

Trong đó a, θ là các hàm biến đổi chậm theo thời gian. Đạo hàm phương trình (35) theo thời gian và so sánh với (36) ta có hệ thức

$$\dot{a}\cos\varphi - a\dot{\theta}\sin\varphi = 0 \tag{38}$$

Đạo hàm biểu thức (36) theo thời gian ta có $\ddot{q}$. Sau đó thay thế (35), (36) và $\ddot{q}$ vào phương trình (33) ta được

$$\dot{a}\Omega\sin\varphi + a\Omega\dot{\theta}\cos\varphi = -\varepsilon f(q, D^p q, \dot{q}) \tag{39}$$

Giải hệ hai phương trình đại số tuyến tính, các phương trình (38) và (39), ta nhận được $\dot{a}$ và $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon\frac{3}{\Omega}f(a,\theta,\varphi)\sin\varphi \\ \dot{\theta} &= -\varepsilon\frac{3}{a\Omega}f(a,\theta,\varphi)\cos\varphi \end{aligned} \tag{40}$$

Trong đó

$$f(a,\theta,\varphi) = -\left(k\Omega^2 - \sigma\right)a\cos\varphi - \alpha a^3\cos^3\varphi + \delta a\Omega\sin\varphi - \delta_p\frac{\partial^p q(t)}{\partial t^p} + E\cos(\varphi - \theta) \tag{41}$$

Thực hiện tính thành phần đạo hàm cấp phân số dựa trên công thức sau [3]

$$\begin{aligned} D^p\cos\omega x &= \omega^p\cos\left(\omega x + \frac{p\pi}{2}\right), \\ D^p\sin\omega x &= \omega^p\sin\left(\omega x + \frac{p\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

$$q = a\cos\varphi = a\cos(\Omega t + \theta) = a\cos\theta\cos(\Omega t) - a\sin\theta\sin(\Omega t) \tag{43}$$

$$\frac{\partial^p q(t)}{\partial t^p} = a\Omega^p\cos\left(\varphi + \frac{p\pi}{2}\right) \tag{44}$$

Khi đó biểu thức (41) trở thành

$$f(a,\theta,\varphi) = -\left(k\Omega^2 - \sigma\right)a\cos\varphi - \alpha a^3\cos^3\varphi + \delta a\Omega\sin\varphi - \delta_p\Omega^p a\cos\left(\varphi + \frac{p\pi}{2}\right) + E\cos(\varphi - \theta) \tag{45}$$

Phương trình trung bình hóa của hệ (40) có dạng

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{\varepsilon}{\Omega}\langle f(a,\theta,\varphi)\sin\varphi \rangle = \varepsilon\,\Phi_1(a,\theta)$$
$$\langle \dot{\theta} \rangle = -\frac{\varepsilon}{a\Omega}\langle f(a,\theta,\varphi)\cos\varphi \rangle = \varepsilon\,\Phi_2(a,\theta) \tag{46}$$

Chú ý đến biểu thức (45) ta được

$$\langle f(a,\theta,\varphi)\sin\varphi \rangle = \frac{\Omega^p a\delta_p}{2}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \frac{\Omega a\delta}{2} + \frac{E\sin\theta}{2},$$
$$\langle f(a,\theta,\varphi)\cos\varphi \rangle = -\frac{\Omega^p a\delta_p}{2}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - \frac{\Omega^2 ak}{2} - \frac{3a^3\alpha}{8} + \frac{E\cos\theta}{2} + \frac{a\sigma}{2} \tag{47}$$

Từ điều kiện $\dot{a}_0 = 0,\ \dot{\theta}_0 = 0$ ta suy ra biểu thức xác định nghiệm dừng

$$\frac{\Omega^p a_0\delta_p}{2}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \frac{\Omega a_0\delta}{2} + \frac{E\sin\theta_0}{2} = 0,$$
$$-\frac{\Omega^p a_0\delta_p}{2}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - \frac{\Omega^2 a_0 k}{2} - \frac{3a_0^3\alpha}{8} + \frac{a_0\sigma}{2} + \frac{E\cos\theta_0}{2} = 0 \tag{48}$$

Bình phương hai vế hai biểu thức rồi cộng lại ta được phương trình đường cong biên độ tần số

$$\left[\frac{\Omega^p a_0\delta_p}{2}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \frac{\Omega a_0\delta}{2}\right]^2 + \left[-\frac{\Omega^p a_0\delta_p}{2}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - \frac{\Omega^2 a_0 k}{2} - \frac{3a_0^3\alpha}{8} + \frac{a_0\sigma}{2}\right]^2 - \frac{E^2}{4} = 0 \tag{49}$$

3.2. Khảo sát ổn định của nghiệm dừng

Để nghiên cứu tính ổn định của các nghiệm dừng a_0, θ_0 xác định bởi phương trình (46) của phương trình vi phân (38) ta hãy xét nghiệm tùy ý a, θ của nó với giá trị đầu đủ gần a_0, θ_0. Nghiệm a, θ sẽ được biển diễn dưới dạng

$$a = a_0 + \delta a,\ \theta = \theta_0 + \delta\theta$$

Trong đó $\delta a, \delta\theta$ là 2 biến mới. Rõ ràng nếu $\delta a, \delta\theta$ dần tiến tới 0 khi *t* tăng lên vô cùng thì nghiệm a, θ của hệ (40) sẽ dần đến nghiệm dừng a_0, θ_0 khi *t* tiến đến vô cùng, khi đó nghiệm dừng a_0, θ_0 của hệ (46) sẽ ổn định. Như vậy là sự ổn định của nghiệm dừng a_0, θ_0 sẽ được tính toán theo sự biến thiên của các hàm $\delta a, \delta\theta$.

Khai triển Taylor vế phải của 2 phương trình trên ta có:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_0}{dt} + \frac{d(\delta a)}{dt} = \varepsilon\left[\Phi_1(a_0,\theta_0) + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\right)_0 \delta a + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right)_0 \delta\theta\right] + \ldots,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_0}{dt} + \frac{d(\delta\theta)}{dt} = \varepsilon\left[\Phi_2(a_0,\theta_0) + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial a}\right)_0 \delta a + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)_0 \delta\theta\right] + \ldots \tag{50}$$

Do

$$\begin{cases} \dfrac{da_0}{dt} = \varepsilon\Phi_1(a_0,\theta_0) \\ \dfrac{d\theta_0}{dt} = \varepsilon\Phi_2(a_0,\theta_0) \end{cases} \tag{51}$$

Nên ta có

$$\frac{d(\delta a)}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\right)_0 \delta a + \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right)_0 \delta\theta$$
$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial a}\right)_0 \delta a + \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)_0 \delta\theta \tag{52}$$

Ta biểu diễn nghiệm dưới dạng

$$\delta a = M_1 e^{\lambda t},\ \delta\theta = M_2 e^{\lambda t} \tag{53}$$

Với $M_i\ (i = 1,2)$ là các hằng số. Thay thế các biểu thức này vào (50) ta sẽ có các phương trình đại số đối với các hằng số $M_i\ (i = 1,2)$

$$\left[\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\right)_0 - \lambda\right]M_1 + \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right)_0 M_2 = 0$$
$$\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial a}\right)_0 M_1 + \left[\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)_0 - \lambda\right]M_2 = 0 \tag{54}$$

Để cho các hằng số $M_i\ (i = 1,2)$ không đồng thời triệt tiêu, định thức của các hệ số của chúng $\Delta(\lambda)$ phải bằng 0

$$\begin{vmatrix} \varepsilon\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial a}\right)_0 - \lambda & \varepsilon\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right)_0 \\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial a}\right)_0 & \varepsilon\left(\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{55}$$

Hoặc

$$\lambda^2 - \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)_0 \lambda + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial a}\right)_0 = 0 \tag{56}$$

Nếu 2 nghiệm λ của phương trình (56) đều có phần thực âm thì nghiệm a_0, θ_0 của hệ (40) sẽ ổn định tiệm cận, nghĩa là

$$H(a_0,\theta_0) = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)_0 < 0$$
$$K(a_0,\theta_0) = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial a}\right)_0 > 0$$

Trong đó

$$H\left(a_0,\theta_0\right)=-\Omega^{p-1}\delta_p\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)-\delta$$

$$K\left(a_0,\theta_0\right)=\frac{3}{4}\Omega^{p-2}\delta_p\left(\alpha a_0^2+\frac{2\Omega^2 k}{3}-\frac{2\sigma}{3}\right)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$$
$$+32\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\Omega^{p+1}\delta\delta_p+16\Omega^{2p}\delta_p{}^2$$
$$+16\Omega^4k^2+\left(48a_0^2\alpha k+16\delta^2-32k\sigma\right)\Omega^2$$
$$+27a_0^4\alpha^2-48a^2\alpha\sigma+16\sigma^2$$

3.3. Vẽ đồ thị đường cong biên độ tần số

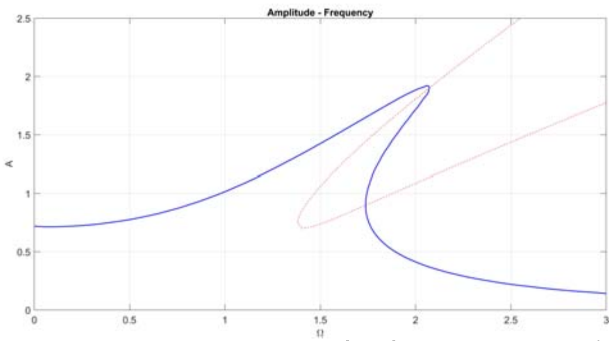
Xét phương trình (27)

$$\ddot{q}(t)+\omega_o^2q(t)=-k\omega_o^2q(t)-\alpha q^3(t)$$
$$-\delta\dot{q}(t)-\delta_p\frac{\partial^p q(t)}{\partial t^p}+E\cos\Omega t$$

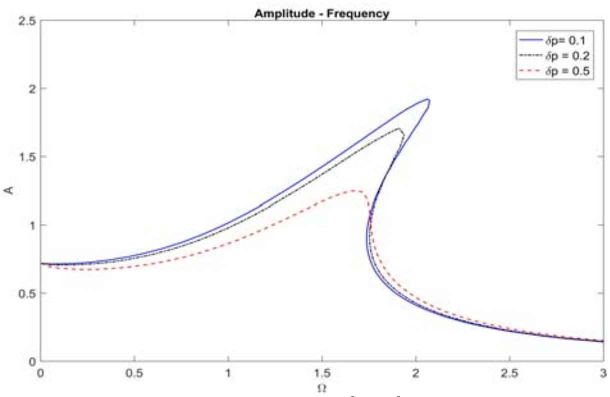
Để vẽ đường cong biên độ tần số theo phương trình (49) ta sử dụng bộ số liệu sau đây :

$$\delta_p=0.1, p=0.5, E=1, \alpha=1,$$
$$\delta=0.2, k=0.1, \omega_0=1, \Omega\approx\omega_0$$

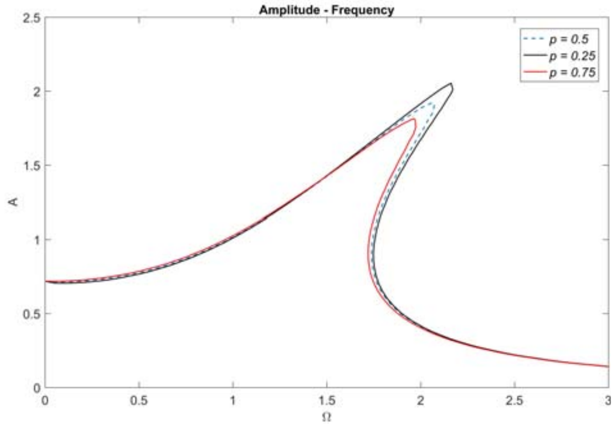
Một số kết quả tính được thể hiện trên các hình 2, 3 và 4. Trong đó hình 2 là đồ thị đường cong biên độ - tần số. Hình 3 là ảnh hưởng của tham số cản cấp phân số $\delta_p=0.1;0.2;0.5$. Hình 4 là ảnh hưởng của bậc đạo hàm cấp phân số $p=0.25;0.5;0.75$.



Hình 2. Đường cong biên độ - tần số (đường nét đứt thể hiện điều kiện ổn định)



Hình 3. Đường cong biên độ - tần số (xét tới ảnh hưởng của tham số δ_p)



Hình 4. Đường cong biên độ - tần số (xét tới ảnh hưởng của tham số p)

4. Kết luận

Trong bài báo này, việc tính toán dao động phi tuyến hình học của dầm chịu tác dụng của lực cản cấp phân số đã được khảo sát. Một vài kết quả chính của bài báo có thể tóm tắt như sau:

1) Thiết lập phương trình dao động của dầm có tính đến yếu tố phi tuyến hình học và lực cản cấp phân số. Sau đó sử dụng phương pháp Ritz-Galerkin biến đổi phương trình vi tích phân mô tả dao động uốn của dầm về hệ phương trình vi phân thường. Trong trường hợp đơn giản khi chỉ xét một số hạng đầu tiên trong khai triển Ritz-Galerkin ta nhận được phương trình Duffing có số hạng cản cấp phân số.

2) Áp dụng phương pháp trung bình hóa tính toán dao động cộng hưởng của dầm. Nghiên cứu một vài ảnh hưởng của số hạng cấp phân số đến đường cong biên độ - tần số.

Lời cảm ơn

Bài báo này được hoàn thành với sự tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED).

Tài liệu tham khảo

[1] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Dover Publications, New York 1974.

[2] Miller, K.S. and Ross, B., *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York 1993.

[3] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego 1999.

[4] Baleanu, D., et al.(eds), *Fractional Dynamics and Control*, Springer, New York 2012.

[5] Bùi Thị Thúy, *Dao động phi tuyến yếu của hệ cấp ba có đạo hàm cấp phân số*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 2017.

[6] Nguyen Van Khang, Truong Quoc Chien, *Subharmonic resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative*, ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol. 11, pp. 051018, 2016.

[7] Nguyen Van Khang, Bui Thi Thuy, Truong Quoc Chien, *Resonance oscillation of third order forced van der Pol system with fractional order derivative*, ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol.11, Issue 4, pp. 0410301-0410305, 2016.

[8] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin 1958.

[9] Nguyễn Văn Quyền, *Dao động hỗn độn của dầm phi tuyến*, Luận văn Thạc sỹ, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, 2011.

[10] Nguyễn Văn Khang, *Dao động kỹ thuật* (in lần thứ 4), NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2005.